Cinétique

I. Introduction

La cinétique est l'étude de l'effet de la répartition de la masse d'un solide sur ses gradeurs cinématiques telles que la résultante cinétique (quantité du mouvement), le moment cinétique, la résultante dynamique, le moment dynamique et l'énergie cinétique.

II. Moment cinétique et quantité de mouvement

II.1. Point matériel

Soit M un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{V}_M$ dans un référentiel $\Re$.

- ✓ **La quantité de mouvement de M est notée** $\vec{p}$ son expression est $\vec{p} = m\vec{V}_M$ et son unité est $Kg.m.s^{-1}$.
- ✓ **Le moment cinétique de point M par rapport à un point quelconque A** est noté $\vec{\sigma}_A$ son expression est $\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}$ et son unité est $Kg.m^2.s^{-1}$.

II.2. Système discret

Soit (S) un système discret qui est constitué de N points matériels séparés Mi de masse m_i et de vitesse $\vec{V}_i$.

- ✓ **La quantité de mouvement du système discret (S)** est la grandeur vectorielle $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i$.
- ✓ **Le moment cinétique du système discret (S) par rapport à un point quelconque A** est la grandeur vectorielle $\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{V}_i$.

II.3. système continu

Soit (S) système continu de masse m et de densité volumique de masseρ et M un point de (S) sa vitesse est $\vec{V}_{(M/\Re)}$ dans un référentiel $\Re$.

✓ **La quantité de mouvement du système** continu **(S)** est la grandeur vectorielle.

$$\vec{p}\left(S/\Re\right) = \iiint_V \vec{V}_{(M/\Re)} dm = \iiint_V \vec{V}_{(M/\Re)} \rho dv \ .$$

✓ **Le moment cinétique du système** continu **(S) par rapport à un point quelconque A** est la grandeur vectorielle.

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right) = \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\Re)} dm = \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\Re)} \rho dv \ .$$

III. Torseur cinétique d'un système continu

III.1. Définition

Soit (S) un système continu de masse **m** et de densité volumique de masse ρ et **A et B** deux points quelconques d'espace.

Le moment cinétique du système continu **(S) par rapport au point A est :**

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right) = \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\Re)} dm$$

Le moment cinétique du système continu **(S) par rapport au point B est :**

$$\vec{\sigma}_B\left(S/\Re\right) = \iiint_V \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}_M dm$$

En outre

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right) - \vec{\sigma}_B\left(S/\Re\right) &= \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm - \iiint_V \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}_M dm \\
&= \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M - \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}_M dm \\
&= \iiint_V \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}\right) \wedge \vec{V}_M dm \\
&= \iiint_V \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}_M dm \\
&= \overrightarrow{AB} \wedge \iiint_V \vec{V}_M dm \\
&= \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}
\end{aligned}$$

En effet

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)-\vec{\sigma}_B\left(S/\Re\right)=\overrightarrow{AB}\wedge\vec{p}$$

Enfin

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)=\vec{\sigma}_B\left(S/\Re\right)+\overrightarrow{AB}\wedge\vec{p}\left(S/\Re\right)$$

Egalement

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)=\vec{\sigma}_B\left(S/\Re\right)+\vec{p}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{BA}$$

En effet le champ des vecteurs du moment cinétique obéit à la propriété d'antisymétrique. Par conséquent, le champ des vecteurs du moment cinétique du système continu (S) est un champ antisymétrique, donc il est représentable par un torseur qui s'appelle ***torseur cinétique*** sa résultante est la quantité de mouvement du système (S) et son moment résultant est $\vec{\sigma}\left(S/\Re\right)$. Il est noté $[C]$ et ses éléments de réduction en un point A sont :

$$[C]_A=\begin{pmatrix}\vec{p}\left(S/\Re\right)\\ \vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\iiint_V\vec{V}_{(M/\Re)}dm\\ \iiint_V\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}_{(M/\Re)}dm\end{pmatrix}$$

Où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement du système (S) et $\vec{\sigma}_A$ est le moment cinétique du système (S) par rapport $\Re$ au point A.

Quels que soient A et B deux point d'espace, le moment cinétique de (S) par rapport au point A et celui de (S) par rapport au B vérifient la propriété d'antisymétrique.

$$\vec{\sigma}_B\left(S/\Re\right)=\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)+\vec{p}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{AB}$$

III.2. Résultante du torseur cinétique

La résultante du torseur cinétique d'un système continu (S) est la quantité de mouvement de ce système.

$$\vec{p}\left(S/\Re\right)=\iiint_V \vec{V}_{(M/\Re)}dm=\iiint_V \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}dm=\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \overrightarrow{OM}dm\right)_{\Re}$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM}\right)dm\right)_{\Re}=\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \overrightarrow{OG}dm+\iiint_V \overrightarrow{GM}dm\right)_{\Re}$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OG}\iiint_V dm+\vec{0}\right)_{\Re}=\frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{OG}\right)_{\Re}=m\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OG}\right)_{\Re}$$

$\vec{p}\left(S/\Re\right)=m\vec{V}_{(G/\Re)}$, G est le centre d'inertie de système

Alors

$[C]_A=\begin{pmatrix} m\overrightarrow{V_{(G/\Re)}} \\ \vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)\end{pmatrix}$ Où G est le centre d'inertie du système.

III.3. Théorème de Koenig relatif au moment cinétique

Le théorème de **Koenig** qui permet de lier le moment cinétique $\vec{\sigma}_G\left(S/\Re_G\right)$ d'un solide (S) en centre d'inertie du système par rapport au référentiel barycentrique $\Re_G$ et $\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)$ celui en un point A quelconque par rapport un référentiel $\Re$.

III.3.1. Référentiel barycentrique $\Re_G$

Soit (S) un système matériel de centre d'inertie, G, en mouvement dans un référentiel $\Re$.

Le référentiel barycentrique de (S) est le référentiel d'origine G et en mouvement de translation par rapport au référentiel $\Re$, par conséquent son vecteur de rotation par rapport au $\Re$ est nul $\vec{\Omega}\left(\Re_G/\Re\right)=\vec{0}$.

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right)$ du solide (S) en G centre d'inertie du système par rapport au référentiel $\Re$ est :

$$\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right)=\iiint_V \overrightarrow{GM}\wedge\vec{V}_{\left(M/\Re\right)}dm$$

$$=\iiint_V \overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{V}_{\left(G/\Re\right)}+\vec{V}_{\left(M/\Re_G\right)}\right)dm$$

$$=\iiint_V \overrightarrow{GM}\wedge\vec{V}_{\left(G/\Re\right)}dm+\iiint_V \overrightarrow{GM}\wedge\vec{V}_{\left(M/\Re_G\right)}dm$$

$$=\iiint_V \overrightarrow{GM}dm\wedge\vec{V}_{\left(G/\Re\right)}+\iiint_V \overrightarrow{GM}\wedge\vec{V}_{\left(M/\Re_G\right)}dm$$

$$=\vec{0}\wedge\vec{V}_{\left(G/\Re\right)}+\iiint_V \overrightarrow{GM}\wedge\vec{V}_{\left(M/\Re_G\right)}dm$$

$$=\iiint_V \overrightarrow{GM}\wedge\vec{V}_{\left(M/\Re_G\right)}dm$$

$$=\vec{\sigma}_G\left(S/\Re_G\right)$$

Alors

$$\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right)=\vec{\sigma}_G\left(S/\Re_G\right)$$

Ainsi que

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)=\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right)+\vec{p}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GA}$$

$$=\vec{\sigma}_G\left(S/\Re_G\right)+\vec{p}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GA}$$

III.3.2. Théorème de Koenig

Théorème de Koenig pour le moment cinétique est :

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)=\vec{\sigma}_G\left(S/\Re_G\right)+\vec{p}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GA}$$

III.4. Moment cinétique $\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right)$ d'un solide indéformable (S) en G

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right) &= \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{\left(M/\Re\right)} dm \\
&= \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}_{\left(G/\Re\right)} + \vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{GM} \right) dm \\
&= \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{\left(G/\Re\right)} dm + \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{GM} \right) dm \\
&= \iiint_V \overrightarrow{GM} dm \wedge \vec{V}_{\left(G/\Re\right)} + \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{GM} \right) dm \\
&= \vec{0} \wedge \vec{V}_{\left(G/\Re\right)} + \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{GM} \right) dm \\
&= \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{GM} \right) dm \\
&= I_G\left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \right)
\end{aligned}$$

Alors, Moment cinétique $\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right)$ d'un solide indéformable (S) en G est l'opérateur d'inertie du solide en G appliqué au vecteur de rotation de (S) par rapport à $\Re$. Par conséquent, $\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right)$ est le produit de la matrice d'inertie en G et le vecteur de rotation de S par rapport au $\Re$ $\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)$.

$$\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right) = \Pi_G(\mathrm{S}) \,.\, \vec{\Omega}\left(S/\Re\right)$$

III.4. Moment cinétique $\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)$ d'un solide indéformable (S) en $A \in (S)$

Moment cinétique $\vec{\sigma}_G\left(S/\Re\right)$ d'un solide indéformable (S) en A appartenant au solide (S) est :

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right) = \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\Re)} dm$$

$$= \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}_{(G/\Re)} + \vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{GM}\right) dm, \quad \left[\text{A et M} \in (S),\ \vec{V}_{(M/\Re)} = \vec{V}_{(A/\Re)} + \vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{AM}\right]$$

$$= \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(A/\Re)} dm + \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$$

$$= \iiint_V \overrightarrow{AM} dm \wedge \vec{V}_{(A/\Re)} + \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$$

$$= \iiint_V \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right) dm \wedge \vec{V}_{(A/\Re)} + \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$$

$$= \mathrm{m}\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{(A/\Re)} + I_A\left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\right)$$

$$= \mathrm{m}\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{(A/\Re)} + \Pi_A(\mathrm{S}) \,.\, \vec{\Omega}\left(S/\Re\right)$$

Enfin

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right) = \mathrm{m}\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{(A/\Re)} + \Pi_A(\mathrm{S}) \,.\, \vec{\Omega}\left(S/\Re\right)$$

Si le point A est immobile $\vec{V}_{(A/\Re)} = \vec{0}$

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right) = \Pi_A(\mathrm{S}) \,.\, \vec{\Omega}\left(S/\Re\right)$$

IV. Energie cinétique

IV.1. Point matériel

Soit M un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{V}_M$ dans un référentiel $\Re$.

L'énergie cinétique de M est notée E_C son expression est $E_C = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}_{(M/\Re)}\right)^2$ et son unité est J.

IV.2. Système discret

Soit (S) un système discret qui est constitué de N points matériels Mi de masse m_i et de vitesse $\vec{V}_i$ dans un référentiel $\Re$.

L'énergie cinétique du système discret (S) est $E_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2$.

IV.3. Energie cinétique d'un solide indéformable

IV.3.1. Définition

Soit (S) un solide indéformable de masse m et de densité volumique de masseρ et M un point de (S) sa vitesse est $\vec{V}_{(M/\Re)}$ dans un référentiel $\Re$.

L'énergie cinétique du solide indéformable **(S)** est $E_C = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{V}^2_{(M/\Re)} dm$

IV.3.2.Théorème de Koenig pour énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un solide peut s'écrire comme étant la somme de l'énergie du G affecté de m totale du solide $E_C = \frac{1}{2} m\left(\vec{V}_{(G/\Re)}\right)^2$ et l'énergie cinétique de rotation $E_C\left(S/R_G\right)$.

$$E_C\left(S/\Re\right) = \frac{1}{2} m\vec{V}^2_{(G/\Re)} + E_C\left(S/\Re_G\right)$$

$E_C\left(S/R_G\right)$: est l'énergie de solide (S) dans le référentiel barycentrique.

Démonstration

$$\begin{aligned}
E_C\left(S/\Re\right) &= \frac{1}{2}\iiint_V \vec{V}^2_{(M/\Re)} dm \\
&= \frac{1}{2}\iiint_V \left(\vec{V}_{(G/\Re)} + \vec{V}_{\left(M/\Re_G\right)}\right)^2 dm \\
&= \frac{1}{2}\iiint_V \left(\vec{V}^2_{(G/\Re)} + \vec{V}^2_{\left(M/\Re_G\right)} + 2\vec{V}_{(G/\Re)}.\vec{V}_{\left(M/\Re_G\right)}\right) dm \\
&= \frac{1}{2}\iiint_V \vec{V}^2_{(G/\Re)} dm + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{V}^2_{\left(M/\Re_G\right)} dm + \iiint_V \vec{V}_{(G/\Re)}.\vec{V}_{\left(M/\Re_G\right)} dm \\
&= \frac{1}{2} m\vec{V}^2_{(G/\Re)} + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{V}^2_{\left(M/\Re_G\right)} dm + \vec{V}_{(G/\Re)}.\iiint_V \vec{V}_{\left(M/\Re_G\right)} dm \\
&= \frac{1}{2} m\vec{V}^2_{(G/\Re)} + E_C\left(S/\Re_G\right) + \vec{V}_{(G/\Re)}.\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \overrightarrow{GM} dm\right)_{/\Re_G} \\
&= \frac{1}{2} m\vec{V}^2_{(G/\Re)} + E_C\left(S/\Re_G\right) + \vec{V}_{(G/\Re)}.\vec{0} \\
E_C\left(S/\Re\right) &= \frac{1}{2} m\vec{V}^2_{(G/\Re)} + E_C\left(S/\Re_G\right)
\end{aligned}$$

IV.3.2. Energie cinétique et la matrice d'inertie

$$E_C\left(S/\Re\right)=\frac{1}{2}\iiint_V \vec{V}^2_{(M/\Re)}dm$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_V\left(\vec{V}_{(G/\Re)}+\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}\right)^2 dm$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_V\left(\vec{V}^2_{(G/\Re)}+2\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}+\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}.\ \vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}\right)dm$$

$$=\frac{1}{2}m\vec{V}^2_{(G/\Re)}+2\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\iiint_V\overrightarrow{GM}dm.\vec{V}_{(G/\Re)}+\frac{1}{2}\iiint_V\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}.\ \vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}dm$$

$$=\frac{1}{2}m\vec{V}^2_{(G/\Re)}+2\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\vec{O}+\frac{1}{2}\iiint_V\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}.\ \vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}dm$$

$$\iiint_V\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}.\ \vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}dm=\frac{1}{2}\vec{\Omega}\left(S/\Re\right).\iiint_V\overrightarrow{GM}\wedge\ \left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}\right)dm=\frac{1}{2}\vec{\Omega}\left(S/\Re\right).I_G\left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\right)$$

$$\iiint_V\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}.\ \vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GM}dm=\vec{\Omega}\left(S/\Re\right).I_G\left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\right)=\vec{\Omega}\left(S/\Re\right).\prod_G(S).\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)$$

$$E_C\left(S/\Re\right)=\frac{1}{2}m\vec{V}^2_{(G/\Re)}+\frac{1}{2}{}^t\vec{\Omega}\left(S/\Re\right).\prod_G(S).\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)$$

L'énergie cinétique d'un solide par rapport à un référentiel $\Re$ est :

$$E_C\left(S/\Re\right)=\frac{1}{2}m\vec{V}^2_{(G/\Re)}+\frac{1}{2}{}^t\vec{\Omega}\left(S/\Re\right).\prod_G(S).\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)$$

$\frac{1}{2}m\vec{V}^2_{(G/\Re)}$: est l'énergie cinétique de translation

$\frac{1}{2}{}^t\vec{\Omega}\left(S/\Re\right).\prod_G(S).\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)$: est l'énergie de rotation

Si le solide en mouvement de translation uniquement $\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)=\vec{0}$:

$$E_C\left(S/\Re\right)=\frac{1}{2}m\vec{V}^2_{(G/\Re)}$$